MASSIMI E MINIMI, HESSIANO E AUTOVALORI

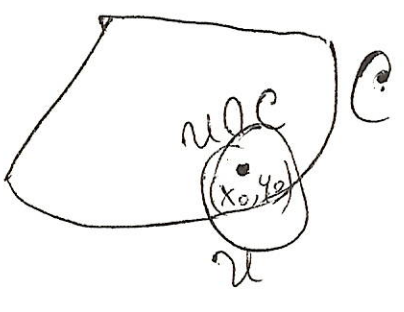
MASSIMI E MINIMI (RELATIVI)

Sia $f: C \to \mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}^2$. Si dice che il punto $(x_0, y_0) \in C$ è un punto di MASSIMO RELATIVO per f se esiste un piccolo cerchio $\mathcal{U}$ di centro (x_0, y_0) tale che $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x,y) \in C \cap \mathcal{U}$.

Un punto (x_1, y_1) è di <u>MASSIMO</u> <u>ASSOLUTO</u> per f se $f(x,y) \leq f(x_1, y_1)$ per ogni $(x,y) \in C$.

Un punto (x_0, y_0) è di <u>MINIMO</u> <u>RELATIVO</u> per $f: C \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se esiste un piccolo cerchio $\mathcal{U}$ di centro (x_0, y_0) tale che $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x,y) \in C \cap \mathcal{U}$.

Un punto (x_1, y_1) è di <u>MINIMO</u> <u>ASSOLUTO</u> per f se $f(x,y) \geq f(x_1, y_1)$ per ogni $(x,y) \in C$.



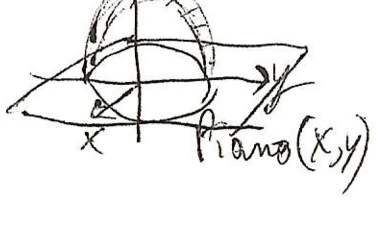
Supponiamo che C abbia le propietà di regolarità "dovute" (come ad esempio quando è stato considerato l'integrale doppio) (su questo, non ci soffermeremo nei dettagli).

Una rappresentazione geometrica del grafico di una funzione di due variabili si può fare, ad esempio, in (almeno) due modi diversi:

1° modo: si può considerare la superficie $z = f(x,y)$ in $\mathbb{R}^3$: ad esempio, se C è il cerchio di centro l'origine e raggio ≤ 1 situato nel piano $z=0$, cioè nel piano (x,y) $\left(\text{in pratica, } \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ z=0 \end{cases}\right)$ ed $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, allora il <u>grafico</u> della funzione f è l'insieme $Gr\, f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$

$$(x,y) \in C,\ z = f(x,y)\} \underset{\text{caso}}{\overset{\text{nel nostro}}{=}} \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ z = \sqrt{1-x^2-y^2}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}:$$

si tratta quindi della superficie sferica dell'emisfero NORD, in quanto abbiamo scelto $z \geq 0$, quindi $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ e non $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$.



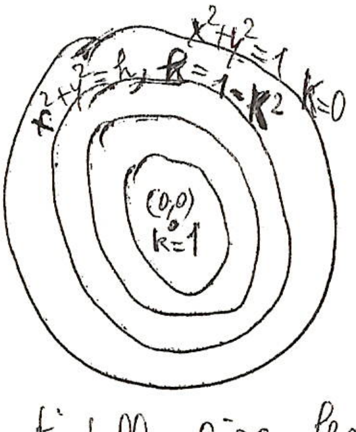
Nel nostro caso:

Funzioni di 1 variabile	Funzioni di 2 variabili
[a, b]	Tutto il cerchio $x^2+y^2\le 1$
I punti a e b, cioè il «confine» o la frontiera di [a, b]	La circonferenza, cioè il «confine» o la frontiera del cerchio: ossia $x^2+y^2=1$
Una curva di $\mathbb{R}^2$ (grafico)	Una superficie di $\mathbb{R}^3$ (grafico)

k sono i valori assunti dalla f (nel nostro caso k varia tra 0 e 1)

LINEE DI LIVELLO k: $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=k\}}$. Es.: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

2° modo: Consideriamo dapprima la circonferenza $x^2+y^2=1$, e poi i suoi punti interni (che costituiscono il nostro cerchio), e "dividiamo" i punti del cerchio in tantissime zone. Ogni zona sarà costituita dall'insieme di quei punti del cerchio dove f assume un fissato valore k: queste "zone" si chiamano **LINEE DI LIVELLO** k. Nel nostro caso si verifica la situazione in figura, e pertanto le linee di livello sono CIRCONFERENZE CONCENTRICHE.



Il punto (0,0) sarà un punto di max assoluto per $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, e lì f vale 1.

I punti della circonferenza $x^2+y^2=1$ sono i punti in cui f vale 0: infatti, se $x^2+y^2=1$, allora $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-1}=0$

(basta sostituire x^2+y^2 con 1, e quindi si ha $-x^2-y^2=-1$).

Ora, (se k è compreso fra 0 e 1) quali sono le $\boxed{\text{LINEE DI LIVELLO } k}$? (in generale)

Si deve avere $f(x,y)=k$, cioè $\sqrt{1-x^2-y^2}=k$.

Poiché k è positivo, possiamo elevare entrambi i membri al quadrato, ottenendo $1-x^2-y^2=k^2$, da cui $-x^2-y^2=k^2-1$, e quindi $\boxed{x^2+y^2=1-k^2}$.

Quindi l'equazione della linea di livello k è

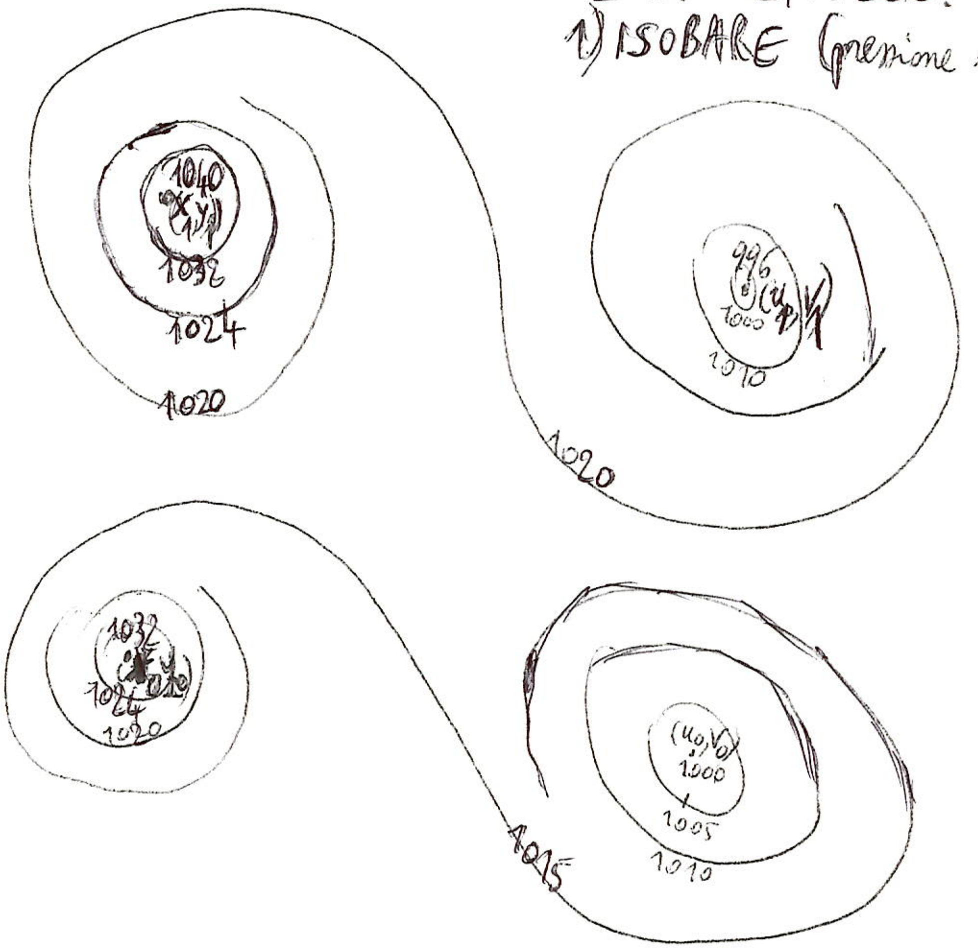
$$\boxed{x^2+y^2=1-k^2},$$

cioè una circonferenza di centro l'origine e di raggio $\sqrt{1-k^2}$.

Quindi IN QUESTO CASO, come si vede dalla figura, LE LINEE DI LIVELLO SONO CIRCONFERENZE CONCENTRICHE.

ESEMPI DI LINEE DI LIVELLO:

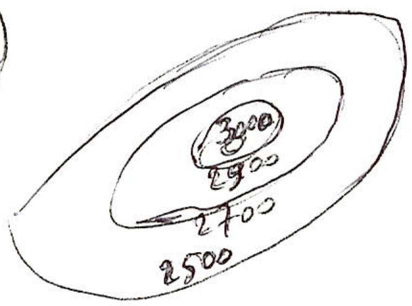
1) ISOBARE (pressione atmosferica)



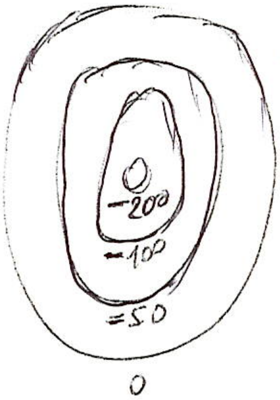
Sulle linee di livello è segnato il valore k che f assume nei punti di quella linea di livello che viene considerata: quindi il punto (x_1, y_1), dove la pressione atmosferica vale 1040 millibar, è un punto di massimo assoluto, mentre il punto (x_0, y_0), dove la pressione atmosferica è di 1032 millibar, è un punto di massimo relativo ma non assoluto.

Analogamente il punto (u_1, v_1), in cui la pressione atmosferica vale 996 millibar, è un punto di minimo assoluto, mentre il punto (u_0, v_0), in cui la pressione atmosferica vale 1000 millibar, è un punto di minimo relativo ma non assoluto.

a)



b)



Un discorso analogo si può fare se si parla di quote di sentieri di montagna (a)), oppure di rilevamento di profondità marine (b)).

DERIVATE PARZIALI

Per funzioni di **due** (e anche di più) variabili, non si può parlare in generale di <u>derivata</u>, ma si può parlare di <u>derivata parziale</u> rispetto a x (cioè, come se la y e tutto ciò che dipende dalla y sia costante) e di <u>derivata parziale</u> rispetto a y (cioè, come se la x e tutto ciò che dipende dalla x sia **costante**)

<u>Esempio:</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad f: C \to \mathbb{R} \quad C = \mathbb{R}^2$

Derivata parziale rispetto ad x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 2x$$

Derivata parziale rispetto ad y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = 2y$$

Il vettore $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ si chiama **GRADIENTE** di f e la scrittura ∇f si pronuncia "**NABLA** f" oppure "de f"
Nel nostro caso, $f(x,y) = x^2 + y^2$, si ha
$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$.
Notiamo che $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Quand'è che $\nabla f(x,y) = (0,0)$? Se e solo se ($\Longleftrightarrow$)

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Def.: Un punto (x,y) tale che $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si dice <u>PUNTO CRITICO</u> o <u>STAZIONARIO</u>.

Sussiste il seguente <u>TEOREMA</u> del tipo <u>FERMAT</u> per funzioni di due variabili (senza dimostrazione).

Se (x_0, y_0) è un punto di **max** o min relativo per $f: C \to \mathbb{R}$ (dove $C \subset \mathbb{R}^2$, $C \neq \emptyset$ e tale che per ogni punto di C (diciamo $(\bar{x},\bar{y})$) posso disegnare un piccolo cerchio U di centro $(\bar{x},\bar{y})$ <u>contenuto</u> <u>in</u> C, cioè C è <u>APERTO</u> NON VUOTO), e se f ha derivate parziali in (x_0,y_0) sia rispetto ad x che rispetto ad y, allora:

TESI: $\boxed{\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)}$ cioè $\boxed{\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}}$, ossia
<u>il gradiente di f si annulla in (x_0,y_0)</u>.

È UNA CONDIZIONE <u>NECESSARIA</u>, ma <u>NON</u> <u>SUFFICIENTE</u>.

||N.B.: C è <u>aperto</u> "vuol dire": <u>nessun</u> punto della "buccia" di C può appartenere a C.||

Infatti, consideriamo il seguente esempio:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad C = \mathbb{R}^2$$

Calcoliamo le derivate parziali di f rispetto ad x e ad y. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = -2y$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$$

Quindi $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$, ossia se e solo se $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. L'unico punto stazionario è $(0,0)$.

Vedremo più avanti che $(0,0)$ non è né di max né di min relativo per f. Un punto stazionario che non è né di massimo né di minimo relativo per f si chiama PUNTO SELLA.

A questo punto, che cosa si fa? Per vedere se un punto stazionario è un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella, si calcolano le derivate parziali seconde $f_{xx}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ e poi, detto (x_0, y_0) il nostro punto stazionario, si sostituiscono i valori $f_{xx}(x,y)$, ..., $f_{yy}(x,y)$, che in generale dipendono dalle variabili x ed y, con i numeri che si ottengono quando, nelle espressioni $f_{xx}(x,y)$, ..., $f_{yy}(x,y)$, si mette x_0 al posto di x ed y_0 al posto di y. Ma è meglio dare direttamente un esempio.

ESEMPIO: $f(x,y) = x^4 - 4x + y^4 - 4y$

Teniamo conto che, quando si deriva rispetto ad x (y), la y (la x) è considerata come se fosse una costante.

Iniziamo dalle derivate parziali prime. Si ha:

$f_x(x,y) = 4x^3 - 4$, $f_y(x,y) = 4y^3 - 4$.

Per determinare i punti stazionari, imponiamo la condizione (necessaria, ma in generale non sufficiente) dell'annullamento del gradiente (cioè, le due derivate parziali f_x ed f_y devono essere contemporaneamente nulle). Si ha: $\nabla f(x,y) = (0,0) \overset{\text{se e}}{\underset{\text{solo se}}{\iff}}$

$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} 4x^3 - 4 = 0 \\ 4y^3 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - 1 = 0 \\ y^3 - 1 = 0 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} x^3 = 1 \\ y^3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt[3]{1} = 1 \\ y = \sqrt[3]{1} = 1 \end{cases}$. Pertanto il punto $(1,1)$ è l'(unico) punto stazionario di f.

Adesso calcoliamo le derivate parziali seconde in generale. Si ha:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3 - 4) = 12x^2 - 0 = 12x^2$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 - 4) = 0$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(4y^3 - 4) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(f_y(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(4y^3 - 4) = 12y^2 - 0 = 12y^2$$

In generale, la matrice delle derivate seconde

$\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$ si chiama

<u>matrice Hessiana</u> (calcolata nel generico punto (x,y)) e il suo <u>determinante</u>

$$H(x,y) = \det(\hat{H}(x,y)) = \det \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} =$$

$$= f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y) \cdot f_{yx}(x,y)$$

si chiama <u>HESSIANO</u> (calcolato nel generico punto (x,y)).

Nel nostro caso si ha:

$$\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}, \text{ e quindi}$$

$$\boxed{H(x,y)} = 12x^2 \cdot 12y^2 - 0 \cdot 0 = \boxed{144x^2y^2}.$$

A questo punto entrano in gioco i punti <u>stazionari</u>.

Si "valuta l'Hessiano nei punti stazionari" (in questo caso, nell'unico punto stazionario, che è $(1,1)$).

Che cosa vuol dire ciò? L'espressione $H(x,y)$, in generale, contiene la lettera x e la lettera y.

Valutare l'Hessiano nel punto stazionario (x_0, y_0) significa sostituire x con x_0 ed y con y_0 nell'espressione di $H(x,y)$; così si trova la quantità $H(x_0, y_0)$.

Nel nostro caso, determiniamo $H(1,1)$, cioè l'Hessiano nel nostro punto stazionario $(1,1)$: ciò vuol dire, nell'espressione $H(x,y) = 144x^2y^2$, sostituire x con 1 ed y con 1, ottenendo $\boxed{H(1,1) = 144}$.

Ora facciamo la seguente osservazione preliminare:

NEI NOSTRI ESERCIZI PRENDEREMO SEMPRE FUNZIONI f TALI CHE $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ per ogni (x,y) appartenente al campo di esistenza della f:

questo <u>non</u> è una restrizione, perché tutte le funzioni (di 2 variabili x ed y) che sono sufficientemente "regolari", "buone" godono di questa proprietà, e a noi - per l'appunto - interessano in questo corso soltanto funzioni che abbiano una certa "regolarità". Prenderemo inoltre come insieme di definizione per f un insieme "aperto" non vuoto $C \subset \mathbb{R}^2$, cioè un insieme tale che, per

ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in C$, esiste un piccolo cerchio U avente come centro il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ e completamente immerso in C. Ciò vuol dire sostanzialmente (se C è "una figura sufficientemente regolare") che nessun punto della "buccia" (che si chiama anche "frontiera") di C deve appartenere all'insieme C.

Ora formuliamo il nostro

TEST DELL' HESSIANO: Sia (x_0, y_0) un punto STAZIONARIO per $f: C \to \mathbb{R}$, e consideriamo $H(x_0, y_0)$, cioè l'Hessiano (ossia il determinante della matrice Hessiana) calcolato nel punto (x_0, y_0), ossia

$$H(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0) \cdot f_{yx}(x_0, y_0) =$$
$$= f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2.$$

Allora:

1) Se $H(x_0, y_0) > 0$ ed $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ [oppure, il che è equivalente, se $H(x_0, y_0) > 0$ ed $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$], allora (x_0, y_0) è un punto di MINIMO RELATIVO per f.

2) Se $H(x_0, y_0) > 0$ ed $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ [oppure, cosa che è equivalente, se $H(x_0, y_0) > 0$ ed $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$], allora (x_0, y_0) è un punto di MASSIMO RELATIVO per f.

3) Se $H(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è un punto SELLA per f (cioè non è né di massimo né di minimo relativo).

4) Se $H(x_0, y_0) = 0$;

allora <u>non</u> <u>si</u> <u>può</u> <u>dire</u> <u>nulla</u>

e bisogna fare altre indagini
(bisognerebbe...)

(ma allora in questo caso, dovesse capitare in un esercizio, ci si ferma qui e si dice semplicemente che non si può dire nulla)

<u>ESEMPI</u>: 1) $f(x,y) = x^4 - 4x + y^4 - 4y$ (Sono <u>tutte</u> funzioni definite in $\mathbb{R}^2$)

Abbiamo visto che $f_x(x,y) = 4x^3 - 4$, $f_y(x,y) = 4y^3 - 4$, $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$

$\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$, $H(x,y) = 144\, x^2 y^2$.

Abbiamo visto anche che l'unico punto stazionario è $(1,1)$, quindi $\hat{H}(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$, $H(1,1) = 144 > 0$, ed $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ (e anche $f_{yy}(1,1) = 12 > 0$). Pertanto, per il test dell'Hessiano, siamo nel caso 1), e il punto $(1,1)$ è un punto di <u>minimo</u> <u>relativo</u>.

2) $g(x,y) = -x^4 + 4x - y^4 + 4y$

Si ha: $g_x(x,y) = -4x^3 + 4$, $g_y(x,y) = -4y^3 + 4$.

Per determinare i punti stazionari, imponiamo la condizione di annullamento del gradiente, cioè dell'annullarsi SIMULTANEO delle derivate parziali prime g_x e g_y. Si deve avere

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4x^3 + 4 = 0 \\ -4y^3 + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 = 4x^3 \\ 4 = 4y^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^3 = 1 \\ y^3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Pertanto $(1,1)$ è l'(unico) punto stazionario di g.

Si ha:

$g_{xx}(x,y) = -12x^2$, $g_{xy}(x,y) = 0 = g_{yx}(x,y)$,

$g_{yy}(x,y) = -12y^2$,

$$\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix}, H(x,y) = 144x^2y^2.$$

Quindi,

$\hat{H}(1,1) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$, $H(1,1) = 144 > 0$, e $g_{xx}(1,1) = -12 < 0$ (e anche $g_{yy}(1,1) = -12 < 0$). Pertanto, per il test dell'Hessiano, siamo nel caso 2), e il punto $(1,1)$ è un punto di <u>massimo relativo</u>.

3) $h(x,y) = x^4 - 4x - y^4 + 4y$

Si ha: $h_x(x,y) = 4x^3 - 4$, $h_y(x,y) = -4y^3 + 4$.
Per trovare i punti stazionari, imponiamo la condizione di annullamento del gradiente, cioè dell'annullarsi delle derivate parziali prime h_x ed h_y contemporaneamente. Si deve avere

$$\begin{cases} h_x(x,y) = 0 \\ h_y(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 4 = 0 \\ -4y^3 + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 = 4 \\ 4 = 4y^3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^3 = 1 \\ y^3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$ Quindi $(1,1)$ è l'(unico) punto stazionario di h. Si ha:

$h_{xx}(x,y) = 12x^2$, $h_{xy}(x,y) = h_{yx}(x,y) = 0$,
$h_{yy}(x,y) = -12y^2$,

$$\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix}, \quad H(x,y) = -144x^2y^2.$$

Pertanto,

$$\hat{H}(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}, \quad H(1,1) = \det(\hat{H}(1,1)) = -144 < 0.$$

Pertanto, per il test dell'Hessiano, siamo nel caso 3), e il punto $(1,1)$ è un punto <u>SELLA</u> (cioè né di massimo né di minimo relativo).

4) $f(x,y) = x^2+y^2$

Abbiamo visto che $f_x(x,y)=2x$, $f_y(x,y)=2y$, e che l' unico punto stazionario di f è $(0,0)$.

Si ha: $f_{xx}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=0=f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)=2$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Quindi questi "2" (e "0") SONO DELLE COSTANTI !! NON DIPENDONO né da x né da y !!! Pertanto si ha, in particolare, $f_{xx}(0,0)=2=f_{yy}(0,0)$, $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)=0$ (perché se una proprietà vale per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, naturalmente vale anche nel punto $(0,0)$). Quindi $(\forall(x,y))$

$\hat{H}(x,y) = \hat{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $H(0,0)=4>0$, e $f_{xx}(0,0)=2>0$ (ed anche $f_{yy}(0,0)=2>0$). Pertanto, per il test dell' Hessiano, siamo nel caso 1), e il punto $(0,0)$ è un punto di minimo relativo (che è anche minimo assoluto, come l'intuizione suggerisce, perché $f(0,0)=0$, ed $f(x,y)=x^2+y^2>0$ per ogni $(x,y)\neq(0,0)$, in quanto almeno uno tra x ed y è $\neq 0$, e allora almeno uno tra x^2 ed y^2 è strettamente positivo, e quindi la somma x^2+y^2 è strettamente positiva, ed allora $f(x,y)>0$ per ogni $(x,y)\neq(0,0)$, e dunque, essendo $f(0,0)=0$, il punto $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto).

5) $f(x,y) = -x^2-y^2$

Si ha: $f_x(x,y)=-2x$, $f_y(x,y)=-2y$, ed (x,y) è un punto stazionario se e solo se $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x=0 \\ -2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Dunque, l' unico punto stazionario è $(0,0)$. Si ha: $f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=-2$; $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=0$

per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Procedendo come nell'esempio precedente, si ottiene – in particolare –

$f_{xx}(0,0)=-2=f_{yy}(0,0)$, $f_{xy}(0,0)=0=f_{yx}(0,0)$.

$\hat{H}(x,y)=\hat{H}(0,0)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, $H(0,0)=4>0$, e

$f_{xx}(0,0)=-2<0$ (ed anche $f_{yy}(0,0)=-2<0$). Quindi per il test dell'Hessiano, siamo nel caso 2), e il punto $(0,0)$ è un punto di <u>massimo relativo</u> (che è anche <u>massimo assoluto</u>, come l'intuizione suggerisce: infatti, analogamente come nell'esempio precedente, si può vedere che $f(0,0)=0$ ed $f(x,y)<0$ per ogni $(x,y)\neq(0,0)$, quindi $(0,0)$ è un punto di <u>massimo assoluto</u>)

6) $f(x,y)=x^2-y^2$

Eccoci! Come promesso, facciamo vedere che $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo relativo, e quindi è un punto SELLA.

Abbiamo visto che $f_x(x,y)=2x$, $f_y(x,y)=-2y$ $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$ e che l'<u>unico</u> punto stazionario è $(0,0)$. Si ha:

$\hat{H}(x,y)=\begin{bmatrix}f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e quindi

$\hat{H}(0,0)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, $H(0,0)=2\cdot(-2)-0\cdot 0=-4<0$: pertanto, per il test dell'Hessiano, siamo nel caso 3), e il punto $(0,0)$ è un punto SELLA, quindi non è né di massimo né di minimo relativo, come precedentemente affermato.

AUTOVALORI

Sia A una matrice quadrata 2×2 (cioè formata da 2 righe e 2 colonne).

Si dice <u>AUTOVALORE</u> di A una (qualsiasi) soluzione λ (reale o complessa) dell'equazione

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

dove $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matrice <u>identità</u> 2×2), $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

<u>Esempio</u>: Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Allora si ha

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}, \text{ e}$$

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda) \cdot (3-\lambda)$.

Allora l'equazione $\det(A - \lambda I) = 0$ si scrive $(1-\lambda) \cdot (3-\lambda) = 0$, che ammette le soluzioni $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Pertanto gli autovalori di A sono

$$\boxed{\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3}.$$

Sussiste il seguente <u>importante</u> risultato

<u>Teorema</u> (senza dimostrazione). Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ è una matrice <u>simmetrica</u> (cioè tale che $a_{21} = a_{12}$), allora i suoi autovalori sono <u>reali</u>.

(<u>Esempi</u>: la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ <u>è simmetrica</u>, mentre la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ <u>non è simmetrica</u>)

<u>N.B.: IMPORTANTISSIMO</u>: Nel nostro contesto e nei nostri esercizi abbiamo a che vedere con matrici Hessiane del tipo $\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$ dove $\boxed{f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)}$

perché le nostre funzioni f saranno sufficientemente "regolari", e quindi – di fatto – le nostre matrici Hessiane saranno SIMMETRICHE. Di conseguenza, gli autovalori saranno sempre REALI, e dunque si escluderà sempre il caso "patologico" di avere autovalori complessi che non sono reali.

Si può formulare anche una variante del test dell' Hessiano (equivalente a quello di cui sopra) per funzioni di due variabili CON GLI AUTOVALORI.

N.B.: Lo strumento matematico (= tool) degli autovalori è particolarmente importante quando si studiano le funzioni di 3 o più variabili: infatti, in tal caso, sostanzialmente per avere, formulare un "buon" test dell' Hessiano bisogna necessariamente usare (di fatto) gli autovalori (perché ci sono anche versioni del test dell' Hessiano senza autovalori, ma richiedono un gran numero di calcoli e di conti...)

TEST DELL'HESSIANO CON GLI AUTOVALORI

Sia $f: C \longrightarrow \mathbb{R}$, con [$C \neq \emptyset$ aperto di $\mathbb{R}^2$], f sufficientemente "regolare". Sia (x_0, y_0) un punto STAZIONARIO (cioè tale che $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$). Sia

$$\hat{H} = \hat{H}(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$ la matrice Hessiana

e consideriamo gli autovalori della matrice Hessiana, cioè le soluzioni λ dell'equazione $\det(\hat{H} - \lambda I) = 0$, ove I è la matrice "identica" 2×2, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (Osserviamo che, per f sufficientemente regolare, $f_{xy} = f_{yx}$, e quindi da ciò segue che gli autovalori di $\hat{H}$ sono <u>REALI</u>)

<u>TESI</u>: Se gli autovalori λ_1 e λ_2 di $\hat{H}$ sono entrambi positivi, allora (x_0,y_0) è un punto di <u>minimo relativo</u> per f.
Se gli autovalori λ_1 e λ_2 di $\hat{H}$ sono entrambi negativi, allora (x_0,y_0) è un punto di massimo relativo per f.
Se gli autovalori λ_1 e λ_2 di $\hat{H}$ sono <u>uno</u> (strettamente) <u>positivo</u> e l'<u>altro</u> (strettamente) <u>negativo</u>, allora (x_0,y_0) è un <u>punto SELLA</u>, cioè non è né di max né di min relativo.
Se almeno uno degli autovalori λ_1, λ_2 è uguale a 0, allora <u>non</u> si può dire nulla.

ESEMPI

Vediamo ora due esempi semplici, per cominciare.

Esempio 1) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Si ha: $f_x = 2x$, $f_y = 2y$.

Imponiamo la condizione dell'annullamento del gradiente. Si deve avere $(f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$, cioè $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Pertanto l'unico punto stazionario di f è $(0,0)$.

Studiamo la natura di questo punto. Innanzi tutto, calcoliamo le derivate parziali seconde. Si ha:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

$$\boxed{f_{yx}} = \frac{\partial}{\partial x}(2y) = 0 = \boxed{f_{xy}} \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2$$

La matrice Hessiana $\hat{H}$ è quindi

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{yx}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e pertanto, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\hat{H} - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$, e dunque

$$\det(\hat{H} - \lambda I) = (2-\lambda)^2 = (\lambda - 2)^2$$

Gli autovalori di $\hat{H}$ sono pertanto entrambi uguali a 2, quindi positivi. Pertanto il punto stazionario (0,0) è un punto di minimo per f (in questo caso, come l'intuizione suggerisce, (0,0) è un punto di minimo assoluto per f)

Esempio 2) $f(x,y) = x^2 - y^2$

Si ha: $f_x = 2x$, $f_y = -2y$.

Imponiamo la condizione dell'annullamento del gradiente. Si deve avere $(f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$, cioè $\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Pertanto l'unico punto stazionario di f è $(0,0)$.

Studiamo la natura di questo punto. Innanzi tutto, calcoliamo le derivate parziali seconde. Si ha:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

$$\boxed{f_{yx}} = \frac{\partial}{\partial x}(-2y) = 0 = \boxed{f_{xy}} \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2$$

La matrice Hessiana $\hat{H}$ è quindi

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{yx}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e pertanto, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\hat{H} - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$, e dunque

$$\det(\hat{H} - \lambda I) = (2-\lambda) \cdot (-2-\lambda) = (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 2)$$

Gli autovalori di $\hat{H}$ sono pertanto 2 e -2, che hanno segno <u>diverso</u> (e nessuno dei due numeri è 0). Pertanto il punto stazionario $(0,0)$ è un punto SELLA per f, come avevamo visto precedentemente.

Considériamo ora la funzione

$$f(x,y) = x^4 - 4x + y^4 - 4y$$

già precedentemente studiata.

Avevamo visto che il punto $(1,1)$ è l'unico punto stazionario, e che la matrice Hessiana è in generale $\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$, e quindi $\hat{H}(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$.

Gli autovalori di $\hat{H}(1,1)$ sono le soluzioni λ dell'equazione $0 = \det(\hat{H}(1,1) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 12-\lambda & 0 \\ 0 & 12-\lambda \end{bmatrix} = (12-\lambda)\cdot(12-\lambda)$, che naturalmente sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 12$: sono di segno <u>positivo</u>, e pertanto il punto $(1,1)$ è un punto di <u>minimo relativo</u>.

Per quanto riguarda invece la funzione

$$g(x,y) = -x^4 + 4x - y^4 + 4y$$

avevamo visto che $(1,1)$ è l'unico punto stazionario, $\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix}$, e perciò $\hat{H}(1,1) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$.

Gli autovalori di $\hat{H}(1,1)$ sono le soluzioni λ dell'equazione $0 = \det(\hat{H}(1,1) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -12-\lambda & 0 \\ 0 & -12-\lambda \end{bmatrix} = (-12-\lambda)\cdot(-12-\lambda)$, che naturalmente sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -12$; sono di segno <u>negativo</u>, e pertanto il punto $(1,1)$ è un punto di <u>massimo</u> relativo.

Infine, per quanto concerne la funzione

$$h(x,y) = x^4 - 4x - y^4 + 4y$$

avevamo visto che $(1,1)$ è l'unico punto stazionario,

$\hat{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix}$, e quindi $\hat{H}(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$.

Gli autovalori di $\hat{H}(1,1)$ sono le soluzioni dell'equazione

$$0 = \det(\hat{H}(1,1) - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 12-\lambda & 0 \\ 0 & -12-\lambda \end{bmatrix} =$$

$= (12-\lambda)\cdot(-12-\lambda)$, che naturalmente sono 12 e -12, l'uno <u>positivo</u> e l'altro <u>negativo</u>: quindi il punto $(1,1)$ è un punto <u>SELLA</u>, cioè né di massimo relativo né di minimo relativo.

Se gli autovalori fossero stati **12** e **0** (oppure 0 e -12), allora non avremmo potuto dire nulla, perché sarebbe stato presente l'autovalore 0.